算術の無矛盾性証明：
ゲンツェンから竹内外史へ

金沢大学　黒川英徳

中央大学　EwM
２０２６年3月２９日

講義の目的（overview, outline）

1. 一階述語論理のシークエント計算 LK における基本定理（カット除去定理）
2. 式列計算において定式化された算術の形式体系（GPA) の無矛盾性証明のアイデア
3. 竹内の基本予想（二階（高階）述語論理の基本定理（カット除去定理）の成立）
   - 第二、第三のトピックについて話すためには，第一のトピックについて話すことが必要.
   - 証明の「形式化」だけでなく，証明を「動かす」ことが必要.

シークエント計算とは何か？

1. シークエント（式列）とは $\Gamma \Rightarrow \Delta$ という形をした記号の列.
2. ここで Γ, Δ は論理式の（有限）列（sequence）である.
3. シークエントとは Γ, Δ を $\Rightarrow$ で結びつけたもの.
4. Γ, Δ はそれぞれ $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_m$ という形をしており，論理式同士は , で区切られている.（Γ, Δ は空列でもよい.）
5. $\Rightarrow$ の左側の論理式の列 (e.g., Γ) を「前件」(antecedent)，右側の論理式の列 (e.g. Δ) を「後件」(succedent) と呼ぶ.
6. “,” の意味は文脈によって変わり，$\Rightarrow$ の左側では「かつ」の，$\Rightarrow$ の右側では「あるいは」の働きをする.
7. シークエント全体としての直観的な意味は，「前件の論理式全てが正しければ，後件の論理式のうち少なくとも一つが正しい」というものになる.

シークエント計算とは？

1. シークエント計算は普通，公理と推論規則からなり，推論規則はさらに構造規則，論理記号に関する規則からなる．
2. 推論規則は，一般に次のような形をしており，上のシークエントから下のシークエントが導出される．
   （このように 1 ステップの推論を図式として書いたものを「推論図」と呼ぶことがある．推論規則は「推論図」によって書かれている．）

   $$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \ldots \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}{\Pi \Rightarrow \Lambda}$$

   （シークエンスを $S_1, \ldots, S_n, S$ と書くと，$\dfrac{S_1, \ldots, S_2}{S}$．）
3. 上のシークエントを「上シークエント」(upper sequent)，下のシークエントを「下シークエント」(lower sequent) と呼ぶ．

LK の導入 （１）

1. 公理 axiom あるいは始シークエント (initial sequent) $\quad A \Rightarrow A$
2. 構造規則 structural rules

2.1 Exchange (Ex)

$$LE \quad \frac{\Gamma, C, D, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, D, C, \Pi \Rightarrow \Delta} \qquad RE \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C, D, \Lambda}{\Gamma \Rightarrow \Delta, D, C, \Lambda}$$

2.2 Weakening (Wk)

$$LW \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{D, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad RW \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, D}$$

2.3 Contraction (Ctr)

$$LC \quad \frac{D, D, \Gamma \Rightarrow \Delta}{D, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad RC \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, D, D}{\Gamma \Rightarrow \Delta, D}$$

2.4 Cut

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, D \qquad D, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

LK の導入 （２）

3. 論理記号に関する規則（論理規則）　operational rules, logical rules

3.1 否定規則　rules for negation

$$L\neg \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, D}{\neg D, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad R\neg \quad \frac{D, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg D}$$

3.2 連言規則　rules for conjunction

$$L\wedge \quad \frac{C, \Gamma \Rightarrow \Delta}{C \wedge D, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{D, \Gamma \Rightarrow \Delta}{C \wedge D, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\wedge \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, D}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \wedge D}$$

3.3 選言規則　rules for disjunction

$$L\vee \quad \frac{C, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad D, \Gamma \Rightarrow \Delta}{C \vee D, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\vee \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \vee D} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, D}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \vee D}$$

3.4 含意規則　rules for implication

$$L\rightarrow \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \qquad D, \Pi \Rightarrow \Lambda}{C \rightarrow D, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \qquad\qquad R\rightarrow \quad \frac{C, \Gamma \Rightarrow \Delta, D}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \rightarrow D}$$

LK の導入 （３）

3.5 全称量化規則　rules for universal quantification

$$L\forall \quad \frac{F(t), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x F(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\forall \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, F(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x F(x)}$$

3.6 存在量化規則　rules for existential quantification

$$L\exists \quad \frac{F(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x F(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\exists \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, F(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x F(x)}$$

ここで t は任意の項．(*) a は下シークエントには現れない．（a をこの推論の Eigenvariable という．）(*) の条件をこれらの推論の「変項条件」（Eigenvariable condition）という．

LK の証明図の例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B}\,RW}{\Rightarrow A, A \to B}\,R\to \qquad A \Rightarrow A}{(A \to B) \to A \Rightarrow A, A}\,L\to}{(A \to B) \to A \Rightarrow A}\,RC}{\Rightarrow ((A \to B) \to A) \to A}$$

- これは「パースの法則」と呼ばれている．
- 直観主義論理では証明できない．
- また通常の自然演繹では $\neg$ をもつ論理式を経ないと証明できないことが知られている．
- 後件に複数の論理式をもつ LK の特徴をよく表している例．

練習問題：ヒルベルトの体系の公理をすべて LK で証明せよ．

練習問題：$\Rightarrow \exists x(B(x) \to \forall y B(y))$

シークエント計算に関する用語法 （１）

1. Cut 規則の中で，上シークエントに現れ，下シークエントに現れない式（D）を「カット式」（cut formula）という．
2. 論理記号に関する規則の各々において，下シークエントに現れる，各規則に固有の論理記号が新しく導入されている式（例えば，$L\neg$, $R\neg$ における $\neg D$ のこと）を当の規則における「主論理式」（principal formula）と呼ぶ．
3. これらの規則の上シークエントに現れて，主論理式の部分になっている式（例えば，D）のことを「補助論理式」（auxiliary formula）と呼ぶ．
4. 上の規則では例として挙げたものの他に $L\wedge$, $R\wedge$，$L\vee$, $R\vee$, $L \rightarrow$, $R \rightarrow$, $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$ の各々において，それぞれ $C \wedge D$, $C \vee D$, $C \rightarrow D$, $\forall x F(x)$, $\exists F(x)$ が主論理式に，C，D, $F(t)$, $F(a)$ が補助論理式になっている．

シークエント計算に関する用語法（2）

4. この体系 LK の「証明図」という概念を以下に定義する．

1) 個々の始シークエントはそのシークエントだけで 1 つの証明図である．その証明図の始シークエント，終シークエントはそれぞれそのシークエント自身である．
2) $\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_n}$ がそれぞれ $S_1, \ldots, S_n$ を終シークエントとする証明図であって，

   $\dfrac{S_1, \ldots, S_n}{S}$ が推論図ならば，$\dfrac{\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_n}}{S}$ は証明図である．

   $\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_n}$ の各々の始シークエントがこの証明図の始シークエントであり，この証明図の終シークエントは S である．
3) 1), 2) によって証明図とされるものだけが証明図と呼ばれる．

シークエント計算に関する用語法（３）

4. シークエントは少なくとも一つの LK の証明図を持つとき，「LK で証明可能」と言われる．
5. ここで「糸」（thread）という概念の定義をしておく．
証明図が与えられたとき，最初が始シークエントであり最後が終シークエントであり，終シークエントを除くすべてのシークエントについて，その下シークエントがその次のシークエントになっているシークエントの列を考え，これを「糸」と呼ぶ．
6. あるシークエント S_1 があるシークエント S_2 の「上にある」とは S_1 が S_2 の前にくる糸が証明図の中に存在していることをいう．

カット除去定理の証明のための若干の準備（1）

- 一階述語論理のカット除去定理では次のような代入に関する補題が必要となる．
- （本講義ではこれらの補助定理について細かい証明は行わない．）
- ここで $A_1(a), \ldots, A_n(a) \Rightarrow B_1(a), \ldots, B_m(a)$ を $\Gamma(a) \Rightarrow \Delta(a)$ のように書くことにする．
- このとき，$\Gamma(t) \Rightarrow \Delta(t)$ とは $A_1(t), \ldots, A_n(t) \Rightarrow B_1(t), \ldots, B_m(t)$ のことである．（つまり，自由変数 a に項 t を代入した結果得られるシークエントである．）

Mix という規則を持つ体系の導入　（1）

ゲンツェンの証明に近い形でカット除去定理を証明する場合，技術的な理由から Cut 規則の別ヴァージョンを導入する．

$$Mix \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad\qquad \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda} \ (A)$$

- ここで，Π, Δ の中には式 A が少なくとも 1 回現れ，かつ Π^*, Δ^* はそうした A の現れを全て Π, Δ から除去したものを意味する．（この式 A を mix formula と呼ぶ．）
- Cut 規則はこの規則の特殊例とみなすことが可能であるため，この規則は Cut 規則の一般化になっている．
- この Mix 規則と Cut 規則は他の構造規則が体系中に存在しているという仮定の下で同値になる．

Mix という規則を持つ体系の導入　（２）

- Cut 以外の規則は全て LK と同じであり，かつ Cut の代わりにこの規則を持つ体系のことを LK' と呼ぶことにする．
- この体系 LK' については次のような意味において LK と LK' は同値であることが証明できる．

  補題

  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が LK において証明可能なのは，その $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が LK' において証明可能なとき，かつそのときのみである．

- この補題の他に次の定理を証明することができる．（なお，上の代入に関する補題も LK' において LK と同様に成り立つ．）

  Mix 除去定理

  $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が LK' において証明可能ならば，LK' において $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は Mix 規則を使わずに証明可能である．

- これにより我々は，カット除去定理を証明するためには，LK' における Mix 除去定理を証明すれば十分ということになる．

Mix 除去定理の証明のために必要な概念の定義（１）

- Mix 除去定理の証明に移る前に，ここで Mix 除去定理の証明のために必要な概念を定義しておく．
  1. 論理式の次数（the grade of a formula）: 論理式の中に含まれる論理記号の数．
  2. 証明図の次数（the grade of a formula）: 証明図 P の Mix における cut formula の次数．（後に見るようにここでの証明では P の中に一つしか Mix が現れない場合のみを扱えば十分．）
     論理式 A の grade を $g(A)$，P の grade を $g(P)$ と書く．
  3. Mix の階数（the rank of a Mix）: Mix の階数を定義する．
     Mix の左側上シークエントを S_1，右側上シークエントを S_2 と呼ぶ．

$$\frac{S_1 \qquad\qquad S_2}{S}\ (A)$$

Mix 除去定理の証明のために必要な概念の定義（2）

3.1 ある糸が S_1 の上にあるとき「左側の糸」，S_2 の上にあるとき「右側の糸」と呼ぶ．

3.2 S_1 の後件には Mix formula A が現れる．S_1 から上を見たとき，その上シークエントの後件が初めて A を含まなくなるようなシークエントを S_0 とする．S_0 から S_1 までのシークエントの列に現れるシークエントの数をこの糸の階数（rank）という．

3.3 同様に，S_2 の前件には Mix formula A が現れる．その上シークエントの前件が初めて A を含まなくなるようなシークエントを S_0 とすれば，S_0 から S_1 までのシークエントの列に現れるシークエントの数をこの糸の階数（rank）という．

3.4 Mix の左階数（$rank_l$）とはそうした左側の糸の階数の最大数，Mix の右階数（$rank_r$）とはそうした右側の糸の階数の最大数のことである．（右側の糸，左側の糸それぞれ複数あり得るため，そのうちの最大数を取る．）

3.5 Mix の階数（$rank$）とは，$rank_l + rank_r$ のことである．

Mix 除去定理の証明のために必要な概念の定義（３）

４） 証明図の階数（the rank of a proof）：後に見るようにここでは，Mix を一つだけ含むような証明 P を問題にすれば十分なので，上の Mix の $rank$ はそのまま，証明図 P の $rank$ とみなすことができる．

- そこで証明図 P の左階数 $rank_l(P)$，証明図 P の右階数 $rank_r(P)$ をそれぞれ上のように定義する．
- 証明図 P の $rank(P)$ とは $rank_l(P) + rank_l(P)$ のことである．
- S_1 の後件，S_2 の前件には必ず Mix formula A は含まれるので，$rank_l(P) \geq 1$ かつ $rank_r(P) \geq 1$ になる．

1-Mix 除去定理から Mix 除去定理を導く

- Mix 除去定理をさらに証明しやすい定理へと還元する．

定理（1-Mix 除去定理）

一番下の推論規則の適用が Mix であり，その他には Mix を含まない証明図が与えられれば，その証明図と同じ終シークエントをもちかつ Mix を含まない証明図を作ることができる．

1-Mix 除去定理から Mix 除去定理を導く

- （Mix 除去定理の 1-Mix 除去定理からの証明）
  証明図における Mix の数に関する帰納法によって証明する．
  与えられた終シークエントの証明を P とする．
  - P における Mix の数が 0 である場合，P は Mix を含まないので，この場合は自明．
  - P における Mix の数が $n > 0$ である場合，P において一番上にある Mix を考える．この Mix の上の証明図に Mix は現れないのでこの証明図については，上の定理が適用でき，この Mix は除去できる．このようにして得られた証明図を P' と呼ぶ．証明図 P' の中に現れる Mix の数は n より 1 つ小さくなる．従って，帰納法の仮定により P' の中の Mix はすべて除去することができる．
- 従って，Mix 除去定理の証明を完成するには上の 1-Mix 除去定理を証明すれば十分である．以下ではこの定理を証明する．

1-Mix 除去定理の証明

- ここでは 1-Mix 除去定理を，一番下の推論規則の適用が Mix であるような証明図 P の次数 $g(P)$ と階数 $rank(P)$ の二重帰納法によって証明する．（これは $\omega \cdot g + rank$ についての超限帰納法と言ってもよい．)
- これは g をメイン，$rank$ をサブとして使う帰納法である．

1-Mix 除去定理の証明　Case 1. $rank(P) = 2$ （１）

Case 1. $rank(P) = 2$, i.e. $rank_l(P) = 1$ かつ $rank_r(P) = 1$.

Subcase 1.1　S_1 が始シークエントの場合.
Subcase 1.2　S_2 が始シークエントの場合.

（自明なので、スキップ）

1-Mix 除去定理の証明　Case 1. $rank(P) = 2$ （２）

Subcase 1.3 S_1, S_2 はどちらも始シークエントではなく，S_1, S_2 のどちらかが構造規則の下シークエントになっている場合．

特に，S_1 が構造規則の下シークエントになっている場合．この場合，P は次のような形をしている．

$$\dfrac{J_1\,\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \Rightarrow \Delta_1, \Lambda}\,(A)$$

ここで $rank_l(P) = 1$ より，Mix formula A は Δ_1 のうちに現れることはない．このことから，構造規則 J_1 が RW 以外の規則である可能性はない．従って，この証明の終シークエントは次のようにして Mix を使わずに証明できる．

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1}{\text{何回か } LW,\ RW}}{\Gamma, \Pi^* \Rightarrow \Delta_1, \Lambda}$$

Subcase 1.4 S_2 が構造規則の場合も同様にして証明できる．

1-Mix 除去定理の証明　Case 1. $rank(P) = 2$ （３）

Subcase 1.5 S_1 と S_2 は両方とも始シークエントでなく，かつ共に論理規則の下シークエントである場合.

この場合には，$rank_l(P) = rank_r(P) = 1$ であることから，Mix formula A は，それらの規則の主論理式（principal formula）になっていなければならない.

ここでは主論理式の形に応じて，さらに場合分けを考える.

1-Mix 除去定理の証明　Case 1.　$rank(P) = 2$（９）

1.5.5　$A = \forall x B(x)$
この場合には証明 P は次のような推論で終わるはずである．

$$
\dfrac{R\forall\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, \forall x B(x)} \qquad \dfrac{B(t), \Pi_1 \Rightarrow \Lambda}{\forall x B(x), \Pi_1 \Rightarrow \Lambda}\ L\forall}{\Gamma, \Pi_1 \Rightarrow \Delta_1, \Lambda}\ (\forall x B(x))
$$

- $B(a)$ において，すべての a が「明示的に示されていなければならない」ことに注意．
- また Eigenvariable condition によって，a は $\Gamma, \Delta_1, \forall x B(x)$ には a は現れない．
- 証明 P には Mix は一度しか使われていないという仮定により，$\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B(a)$，$B(t), \Pi_1 \Rightarrow \Lambda$ に至る証明に Mix は使われていない．

1-Mix 除去定理の証明　Case 1.　$rank(P) = 2$ （１０）

代入に関する補題により，$\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B(a)$ の証明における a の現れのすべてに項 t を代入したもの，つまり $\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B(t)$ は，やはり Mix を使わずに証明できる．

ここで，次のような証明 P' を考える．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B(t) \qquad B(t), \Pi_1 \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi_1^\sharp \Rightarrow \Delta_1^\sharp, \Lambda}\,(B(t))$$

$\Pi_1^\sharp$, $\Delta_1^\sharp$ は Π_1, Δ_1 から $B(t)$ の現れをすべて取り除くことで得られる．

この証明はただ一つの Mix しか含まず，かつ
$g(B(t)) < g(\forall x B(x))$ であるから，帰納法の仮定により，この Mix は除去することができる．

元の結論は Mix 以外の構造規則を何度か適用することに得られる．

Case 2. $rank(P) > 2$. $rank_l(P) > 1$ or $rank_r(P) > 1$.

この場合には，次のような帰納法の仮定を考える：

次のような条件を満たす，Mix をただ一つ，最後の推論としてもつすべての証明 Q から Mix を除去することができる．

i) $g(Q) < g(P)$ あるいは
ii) $g(Q) = g(P)$ かつ $rank(Q) < rank(P)$.

（Case 1 ではこのうちの i) だけしか使わなかったことに注意．）

Case 2.1 $rank_r(P) > 1$ （０）

Case 2.1 $rank_r(P) > 1$

Subcase 2.1.0 A が Γ の中に現れる場合.

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \Rightarrow \Lambda}{A, \Pi^* \Rightarrow \Lambda}\ \text{何回かの } LE,\ LC}{\Gamma, \Pi^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}\ \text{何回かの } LW,\ LE,\ RW$$

Case 2.1 $rank_r(P) > 1$ （１）

Subcase 2.1.1 S_2 を導く推論規則 J_2 は，

i) 構造規則，あるいは
ii) A を主論理式としない論理記号に関する規則である．

この場合には証明 P は次のような推論で終わっているはずである．

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad J_2\,\dfrac{\Phi \Rightarrow \Psi}{\Pi \Rightarrow \Lambda}}{\Gamma, \Pi^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}\,(A)$$

Case 2.1 $rank_r(P) > 1$ （２）

ここで次のような推論で終わる証明 P' を考える．

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Phi \Rightarrow \Psi}{\Gamma, \Phi^* \Rightarrow \Delta^*, \Psi}\,(A)$$

この証明 P' は最後の推論となる，ただ一つの Mix を含み，かつ $rank_r(P') < rank_r(P)$ であり，従って $rank(P') < rank(P)$ である．従って，帰納法の仮定により，この Mix は除去することができる．

さらに以下の推論により，元の証明 P の終シークエントは Mix を使わずに証明可能である．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, \Phi^* \Rightarrow \Delta^*, \Psi}{\text{何回かの } LE,\ RE}}{\Phi^*, \Gamma \Rightarrow \Delta^*, \Psi}}{\cfrac{\cfrac{\Pi^*, \Gamma \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}{\text{何回かの } LE}}{\Gamma, \Pi^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}\,J_2$$

Case 2.1 $rank_r(P) > 1$ （８）

(5) $J_2 = L\forall$ で，$A = \forall x B(x)$

この場合には証明 P は次のような推論で終わっているはずである．

$$\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \cfrac{B(t), \Pi_1 \Rightarrow \Lambda_1}{\forall x B(x), \Pi_1 \Rightarrow \Lambda_1}\, L\forall}{\Gamma, \Pi_1^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda_1}\, (\forall x B(x))$$

Case 2.1 $rank_r(P) > 1$ （９）

ここで次の推論で終わる証明 P' を考える．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B(t), \Pi_1 \Rightarrow \Lambda_1}{\Gamma, B(t), \Pi_1^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda_1} (\forall x B(x))$$

この証明は Mix をただ一つ最後の推論としてもち，かつ $rank_r(P') < rank_r(P)$ （ゆえに $rank(P') < rank(P)$）である．

従って，帰納法の仮定により，この Mix は除去可能である．

Case 2.1 $rank_r(P) > 1$ （１０）

ここでさらに次のような推論で終わる証明 P'' を考える．

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, B(t), \Pi_1^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda_1}{B(t), \Gamma, \Pi_1^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda_1}\text{何回かの } LE}{\forall x B(x), \Gamma, \Pi_1^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda_1} L\forall}{\Gamma, \Gamma, \Pi_1^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda_1} (\forall x B(x))$$

この証明における唯一の Mix は証明の最後に使われており，かつ $L\forall$ の上シークエントの前件には Mix formula は現れない．

Case 2.1 $rank_r(P) > 1$ （１１）

従って，$rank_r(P'') = 1 < rank_r(P)$ であり，つまり
$rank(P'') < rank(P)$ である．

そこで，帰納法の仮定により，この証明の終シークエント
$\Gamma, \Gamma, \Pi_1^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda_1$ は Mix を使わずに証明可能である．

従って，元の証明 P の終シークエントは Mix 以外の構造規則を何度か適用することにより証明可能である．

Case 2.2 $rank_l(P) > 1$

Case 2.2 $rank_l(P) > 1$
これらの場合は，Case 2.1 の場合と同様に証明することができる．

以上で LK のカット除去定理の証明は終わりである．

カット除去定理の帰結（１）部分論理式特性（１）

- カット除去定理の成り立つ体系においては，証明されるべき式の中に現れる式だけを使って（回り道をせずに）証明を組み立てることができる．
- この性質を「部分論理式特性」（the subformula property）と呼ぶ．
- 正確な定義は省略．カット以外の規則では式（の種類）が減らない．

カット除去定理の帰結（３）

LK における矛盾とは，$\Rightarrow$（空なシークエント）が証明されること．

これは次のような理由による．

命題：以下は LK おいて同値である．

1) $\Rightarrow A$ が証明され，かつ　$\Rightarrow \neg A$ が証明される．
2) $\Rightarrow$　が証明される．
3) $\Rightarrow B$ （B は任意の論理式）が証明される．

カット除去が成り立つ体系では，下シークエントで論理式が減ることがあり得ないので，2) が証明できないことは明らかである．（これは部分論理式特性の帰結でもある．）

従って，次が成り立つ．　定理：LK は無矛盾である．

一階算術の言語とゲンツェン流の形式体系（GPA）

- 算術の言語（L_A）：個体定項 0，関数記号 $S, +, \cdot,$（等号 $=$）
- 等号規則
- 数学的始シークエント（CA）
  1. $S(t_1) = S(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$
  2. $S(t_1) = 0 \Rightarrow$
  3. $\Rightarrow t_1 + S(t_2) = S(t_1 + t_2)$
  4. $\Rightarrow t_1 + 0 = t_1$
  5. $\Rightarrow t_1 \cdot 0 = 0$
  6. $\Rightarrow t_1 \cdot S(t_2) = t_1 \cdot t_2 + t_1$
- 帰納法規則（*VJ*-推論規則） $$\frac{F(a), \Gamma \Rightarrow \Delta, F(Sa)}{F(0), \Gamma \Rightarrow \Delta, F(t)} \quad (\mathrm{VJ})$$
  - ここで a は Eigenvariable. $F(0), \Gamma, \Delta$ に現われない.
  - t は任意の項である（t は自由変項 a を含むことがあり得る）.
- GPA = LK + 等号規則 + CA + *VJ*-推論規則

ゲンツェンによる無矛盾性証明のアイデア

- 無矛盾性証明のアイディア．
  a) まず，1) 論理記号に関する推論規則 及び 2) 帰納法の推論規則を含まない（等号，0，$=$，S, $+$, $\cdot$ に関する，条件あるいは再帰条項からなる初等的算術に関する始式のみから出発する証明図）が $\Rightarrow$ を導かないことを示す．

  b) 1), 2) を含む証明図の無矛盾性をより簡単な証明図の無矛盾性に帰着させる．この操作が有限回で終わることを証明するために，超限帰納法が用いられる．

無矛盾性証明の具体的手順

1) 終シークエント（終式列）が $\Rightarrow$ である任意の証明図が与えられたとする．この終式列は単純．これが複雑な証明図で証明されたとする．$\Rightarrow$ を終式列とする任意の証明図を，より簡単な証明図に変形．

2) “より簡単” を数学的に厳密に書くめに，各証明図に順序数を対応させ，“より簡単な証明図” とは順序数を対応させた証明図に対応させた順序数が変形の後小さくなることであるを示す．

3) 1), 2) より，超限帰納法を用いると，最初に与えた証明図を有限回変形することにより，$\Rightarrow$ を終式とする簡単な証明図に至り，かつ，そこから不合理が得られることを示す．（証明図の変形）

   まず $\Rightarrow$ に至る証明図の「終結部分」（Endstück）を考える．帰納法推論と構造規則のみをもつ．（下から辿って，論理的規則の下シークエントで止まるか，始シークエントに至る）．

1. 帰納法の推論規則の変形：n 個の cut におきかえる．（t が自由変項は数項で置き換えておく．）
2. その他の変形（論理的始シークエント，LW, RW を取り去る）
3. 論理規則の変形：この証明の中で一番複雑な式がある
   - この式の一番外側の論理記号は，この式より上である推論規則により導入され，下である推論規則により，除去される．
   - この式の導入前から除去後に直接移る証明図の変形ができる．

有限の立場による（ϵ_0 までの）超限順序数の取り扱い

- 「有限の立場とは，具体的な図形の与えられた列，または具体的な図形の列についての具体的な操作の与えられた列，... についての思考実験を許す立場である」（竹内）
- 形式的自然数（数項）: 0, $S0$, $SS(0)$, ..., $S^n(0)$, ..., 及び $S, +, \cdot$ についての再帰的定義，m, n が全く同じ図形 $\Rightarrow m = n$.
- 超限順序数の集合 $\mathcal{O}_n$ を次のように帰納的に定義
  1. $\mathcal{O}_0$ は 0 だけからなる集合.
  2. $\mathcal{O}_n$（n は数字）が定義され，$\mathcal{O}_n$ の元についてすでに $<$ が定義されていると仮定する．このとき $\mathcal{O}_{n+1}$ を次のように定義. $\mathcal{O}_{n+1}$ の元は $\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$ の形の順序数である. ただし, $\alpha_i \in \mathcal{O}_n$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k$．また，$0 \in \mathcal{O}_{n+1}$. ここで，$=$，$<$ を（自然に）定義する.（詳細は省略）
  3. 1), 2) で定められたものだけが順序数である.
- 順序数の自然和 (#) を定義する.（詳細は省略.）

ϵ_0 までの順序数

- $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ は具体的には次のようになる．$\mathcal{O}_0 = \{0\}$
- $\mathcal{O}_1 = \{0, \omega^0, \omega^0 + \omega^0, \omega^0 + \omega^0 + \omega^0, \dots\}$（$0, 1, 2, 3, \dots$ と同じもの）
  $\mathcal{O}_1$ の極限数は ω．　$(\mathcal{O}_1 = \omega)$
- $$\begin{aligned} \mathcal{O}_2 = \{0,\ \omega^0,\ \omega^0 + \omega^0,\ \omega^0 + \omega^0 + \omega^0, \dots, \\ \omega^{\omega^0},\ \omega^{\omega^0} + \omega^0,\ \omega^{\omega^0} + \omega^0 + \omega^0, \dots, \\ \omega^{\omega^0} + \omega^{\omega^0}, \omega^{\omega^0} + \omega^{\omega^0} + \omega^0, \dots, \} \end{aligned}$$
  $= \{0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2,\ \dots, \omega^2, \dots, \omega^3, \dots\}$.
- $\mathcal{O}_2 = \{\alpha \mid \alpha < \omega^\omega\}$, $\mathcal{O}_3 = \{\alpha \mid \alpha < \omega^{\omega^\omega}\}$, $\mathcal{O}_4 = \{\alpha \mid \alpha < \omega^{\omega^{\omega^\omega}}\}$.
- 一般に $\mathcal{O}_n = \{\alpha \mid \alpha < \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}\}$ n 個 }.
  さらに $\lim_{n\to\infty} \mathcal{O}_n = \mathcal{O}_\omega = \varepsilon_0$.　なお，$\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$ である．

証明変形及び順序減少の準備（１）

- 証明図の高さ（height）とは，証明図の中で，式 S より下に現われる cut または VJ-推論規則の grade の最大値：証明の順序数を決めるのに重要な役割.
- 証明図への順序数の対応：A) 始式列の順序数は 1,
  B) 推論規則が
  1) 構造規則であるとき，この推論の横線には上式と同じ順序数.
  2) cut のとき，左，右の上式にそれぞれ α，β が対応しているならば，cut の横線には自然和 $\alpha\#\beta$ を対応させる.
  3) 論理的推論のとき，
     3.1) 上式が 1 つの場合，これに α が対応していれば，この推論の横線には $\alpha+1$ を対応させる.
     3.2) 上式が 2 つの場合，上式に対応するそれぞれの順序数のうち大きい方（等しい場合も含めて）を α と呼べば，この推論の横線には $\alpha+1$ を対応させる.
  4) VJ-推論規則のとき，上式に $\omega^{\alpha_1}+\cdots+\omega^{\alpha_\nu}$ （$\nu \geq 1$, $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_\nu$）が対応しているならば，この推論の横線には ω^{α_1+1} を対応させる.（$\alpha_\nu = 0$ のときは ω^1 を意味する.）

証明変形及び順序減少の準備（２）

C）推論の横線に対し，上の A，B での述べた仕方で既に順序数 α が対応しているとき，この推論規則の下式には次の順序数が対応する．上の式の高さを ρ としたとき，下式の高さを $\rho - n$（$n \geq 0$）とすると，このとき，下式には順序数

$$\left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}}\right\} n \text{ 個}$$

を対応させる．

（下式の高さが ρ，$\rho - 1$ のとき，$\rho - 2$ のとき，下式に対応する順序数は α， ω^{α}， $\omega^{\omega^{\alpha}}$ ， $\ldots$ となる．）

D） 以上 $A \sim C$ によって始式から次々と順序数を対応させるとき，終式に対応する順序数をこの証明図に対する<u>順序数</u>という．

証明の変形：具体例（１）*VJ*-推論規則

- 終結部分に含まれる（これより下に）*VJ*-規則のない *VJ*-規則を考える．

$$\dfrac{F(a),\ \Gamma \Rightarrow \Theta,\ F(sa) \qquad \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_\nu}}{F(0),\ \Gamma \Rightarrow \Theta,\ F(t)}\ \omega^{\alpha_1+1}$$

- この VJ-推論規則を次の図形で置き換える．$(t = s^n(0))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F(0),\Gamma \Rightarrow \Theta, F(S0) \qquad F(S0),\Gamma \Rightarrow \Theta, F(SS0)}{F(0),\Gamma,\Gamma \Rightarrow \Theta,\Theta, F(SS0)}\ cut}{\overline{F(0),\Gamma \Rightarrow \Theta, F(SS0)}} \qquad F(SS0),\Gamma \Rightarrow \Theta, F(SSS0)}{\dfrac{F(0),\Gamma,\Gamma \Rightarrow \Theta,\Theta, F(SSS0)}{\overline{F(0),\Gamma \Rightarrow \Theta, F(SSS0)}}}\ cut$$

$$\dfrac{\dfrac{\ddots\ \vdots\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} \qquad F(S^{n-1}0),\Gamma \Rightarrow \Theta, F(S^n0)}{F(0),\Gamma,\Gamma \Rightarrow \Theta,\Theta, F(S^n0)}\ cut}{\overline{F(0),\Gamma \Rightarrow \Theta, F(S^n0)}}$$

- cut の数は増えるが，cut の grade は増えない．
- $\omega^{\alpha_1+1} \ > \ \omega^{\alpha_1} \cdot n + \cdots + \omega^{\alpha_\nu} \cdot n.$

証明の変形：具体例（２）論理的規則

変形前（高さ ρ）の証明図：

$$
\dfrac{
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Theta_1,\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Theta_1,\ B\end{array}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Theta_1,\ A \wedge B}\,\mathrm{R}\wedge
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A,\ \Gamma_2 \Rightarrow \Theta_2\end{array}}{A \wedge B,\ \Gamma_2 \Rightarrow \Theta_2 \quad \text{高さ } \rho}\,\mathrm{L}\wedge
}{\Gamma,\ \Delta \Rightarrow \Theta,\ \Lambda}\,\mathrm{cut}
$$

$$
\dfrac{\vdots \qquad \text{高さ } \rho}{\Gamma_3 \Rightarrow \Theta_3 \quad \text{高さ } \sigma < \rho}\ \text{等高線 } \alpha
$$

$$
\begin{array}{c}\vdots\\ \Rightarrow\end{array}
$$

- $\Gamma_3 \Rightarrow \Theta_3$ は，$\Gamma,\ \Delta \Rightarrow \Theta,\ \Lambda$ から $\Rightarrow$（終式）まで辿るとき，カットの上式の高さ ρ より小さい高さをもつ式の最初のものである．このとき，$\Gamma_3 \Rightarrow \Theta_3$ を下式とする推論の横線を**等高線**（Höhenlinie）という．

証明の変形：具体例（２）論理的規則

変形後の証明図：

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\begin{matrix}
\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Theta_1,\ A\end{matrix}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Theta_1,\ A \wedge B,\ A}\ \text{RW, etc.} \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Theta, A \wedge B,\ A
\end{matrix}
\qquad
\dfrac{\begin{matrix}
\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A,\ \Gamma_2 \Rightarrow \Theta_2\end{matrix}}{A \wedge B,\ \Gamma_2 \Rightarrow \Theta_2}\ \text{L}\wedge \\ \vdots
\end{matrix}}{A \wedge B,\ \Delta \Rightarrow \Lambda \quad \text{高さ } \rho}
}{\Gamma,\ \Delta \Rightarrow \Theta,\ \Lambda, A}\ \text{cut}
\\ \vdots
}{\Gamma_3 \Rightarrow \Theta_3,\ A \quad \text{高さ } \tau}\ \alpha_1
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\begin{matrix}
\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Theta_1,\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \Gamma_1 \Rightarrow \Theta_1,\ B\end{matrix}}{\Gamma_1 \Rightarrow \Theta_1,\ A \wedge B}\ \text{R}\wedge \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Theta,\ A \wedge B
\end{matrix}
\qquad
\dfrac{\begin{matrix}
\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A,\ \Gamma_2 \Rightarrow \Theta_2\end{matrix}}{A \wedge B,\ \Gamma_2, A \Rightarrow \Theta_2}\ \text{LW, etc.} \\ \vdots
\end{matrix}}{A \wedge B,\ \Delta, A \Rightarrow \Lambda \quad \text{高さ } \rho}
}{\Gamma,\ \Delta,\ A \Rightarrow \Theta,\ \Lambda}\ \text{cut}
\\ \vdots
}{\Gamma_3,\ A \Rightarrow \Theta_3 \quad \text{高さ } \tau}\ \alpha_2
}{
\dfrac{\Gamma_3,\ \Gamma_3 \Rightarrow \Theta_3,\ \Theta_3 \quad \text{高さ } \sigma}{\begin{matrix}\Gamma_3 \Rightarrow \Theta_3 \quad \text{高さ } \sigma \\ \vdots \\ \Rightarrow\end{matrix}}
}\ \text{新しい cut}
$$

$\alpha > \alpha_1, \alpha_2$ に注意.

よって，$\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}}\}\rho - \tau \quad > \quad \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_1}}}}}}\}\rho - \tau + \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_2}}}}}}\}\rho - \tau$

無矛盾性証明を行う体系・無矛盾性証明の意義

- TI（ϵ_0 までの超限帰納法）　$PRA + TI_{\epsilon_0} \vdash \mathrm{Con(GPA)}$
- TI $=$ PRA の貧しい言語＋強い強い超限帰納法
- PA $=$ より豊かな言語で定式化されているが（数学的帰納法）
- より弱い数学的帰納法をもつ PA の無矛盾性を証明する．
- 強い帰納法は使うが，体系全体として，PA を部分体系として含むわけではないということに注意．
- 二つの体系はある意味で比較不可能である．そこに Gentzen の証明の foundational な（あるいは認識論的）意味がある．
- また，$< \epsilon_0$ までの整列順序は PA で定義可能であるため，ゲンツェンの結果はある意味で optimal.

二階論理とは何か，なぜ重要か？（竹内）

- 一階論理：一種類の変項のみ．
- 実数の構成：e.g. Dedekind cut，有理数の部分集合の概念が必要だが，集合論的表記では $x \in y$
  - 問題 (i)：個体と集合を区別しない $\longrightarrow$ パラドックスの可能性
    そこで個体の「型」とそれらの集合の「型」を区別して，
    型 0 の変項を $x, \ldots$ と書き，型 (0) の変項を $X, \ldots$ と書く．
    $x \in X$: $x \in x$, $X \in X$, $X \in x$ とは書かない．
  - 問題 (ii)：これから定義されるべき集合を定義に使う，
    例えば，「すべての部分集合」という表現を使って
    有理数（あるいは自然数）のあらゆる集合を定義する

非可述性

- 個体とその集合を考える．

  1 つの集合はある性質を満たす自然数の全体として定義され，その定義の原理を内包公理 (comprehension axiom) という

  $A(x)$ を自然数 x の性質，　$X = \{x \mid A(x)\}$ は集合．

- しかし $A(x)$ が $\forall Y\, F(x, Y)$ あるいは $\exists Y\, F(x, Y)$ という形をしているかもしれない．その場合，上の X もその Y の一例ということになる．こうした現象を悪循環という．実数の定義では一般にこれを避けることができない．

- 悪循環は証明図の構造の分析に際して困難を提示する．実数論に関する証明論はこの内包公理の研究を行うものと言ってもよい．

- 以上のような二種類の変項をもつ論理を二階述語論理という　二階述語論理では内包公理を述語の存在原理として次のように　表現される：$\exists X \forall x(X(x) \leftrightarrow A(x))$

二階論理の言語（１）

- 二階述語論理の言語 $L2$,
  1) 一階述語論理の記号,
  2) 二階の自由変項 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$
     α, β, γ と略記
  3) 二階の束縛変項 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$
     φ, ψ と略記
  - α_n, φ_n には ary 数（arity）と呼ばれる自然数 i_n が対応していて，α_n, φ_n は i_n 変項と呼ばれる（一項変項，二項変項，etc.）.
- $L2$ の記号列を $L2$ 表現という．E が $L2$ 表現，e が $L2$ の記号であるとき，e の E における場所も含めた現れ方を e の E における出現（occurrence）という．
- $L2$ の項は一階述語論理の場合と同様に定義される．
- Semi-term（半項？）とは term の定義で束縛変項の自由な出現を許したものである．

二階論理の言語（2）

- formula（論理式）と semi-formula
  1. 一階述語論理の言語の論理式（formula）
  2. α が i-項自由変項で $t_1, \ldots, t_i$ が項であるとき，$\alpha[t_1, \ldots, t_i]$ は atomic formula である
  3. F が formula で φ が F に現れぬ i-項束縛変項とする．α も i-項変項とすれば，F における α の自由な出現をすべて φ に変えたものを F' とすると，$\forall\varphi(F')$, $\exists\varphi(F')$ は formula.
  4. 以上で定義されたもののみが formula であり，semi-formula とは formula の定義で束縛変項の自由な出現を許したもの
- abstract
  - Q を formula，$y_1, \ldots, y_m$ を Q に出現しない，互いに異なる一階束縛変項とする．Q における自由変項 $b_1, \ldots, b_m$ の自由な出現を $y_1, \ldots, y_m$ で置き換えたものを Q' とする．
  - $\lambda y_1 \cdots \lambda y_m\, Q'$ を Q の（1 つの）abstract という．これはメタ表現．$\lambda y.\, Q(y)$ は $Q(y)$ を満足する y 全体の集合を表す．
- quantifier の階数

  $\forall x$, $\exists x$：一階の quantifier，$\forall\varphi$, $\exists\varphi$ ：二階の quantifier
- 代入（を適宜定義する）

二階論理の体系（１）

- 二階純粋論理 SLK（弱い）　$SLK = LK+$ 次の推論規則

$$\frac{F(Q), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall\varphi\, F(\varphi), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\forall 2L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, F(\alpha)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall\varphi\, F(\varphi)}\,\forall 2R$$

Q は二階自由変項あるいは predicate（述語）
φ は Q と同じ arity を持つ．α はこの推論図の eigenvariable

$$\frac{F(\alpha), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists\alpha\, F(\alpha), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,\exists 2L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, F(Q)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists\varphi\, F(\varphi)}\,\exists 2R$$

$\forall 2R$ と同様.　　$\forall 2L$ と同様.

- SLK の基本定理：カット除去定理が成立する．
- 従って無矛盾である．LK についての保存拡大性（$\forall\varphi \in L_1,\quad SLK \vdash \Rightarrow \varphi \;\Rightarrow\; LK \vdash \Rightarrow \varphi$）が帰結する．

二階論理の体系（２）

- 二階論理 with 内包公理
- $\mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n, \psi_1, \ldots, \psi_k)$（略して $\mathfrak{A}$）は，自由変項を含まない semi-formula で formula 束縛変項の自由な出現すべて 書き出されているものとする．このとき，
- (1) $\forall z_1 \ldots, z_n \forall \psi_1, \ldots, \psi_k \exists \varphi \forall y_1, \ldots, y_m (\varphi(y_1, \ldots, y_m) \leftrightarrow \mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n, \psi_1, \ldots, \psi_k))$.
  の形の formula を内包公理という．
  （簡単な場合：$\exists \varphi \forall y (\varphi(y) \leftrightarrow \mathfrak{A}(y))$）
- Φ を任意の semi-formula の集まりとし，Φ に属する semi-formula を，Φ-semi-formula と呼び，そこから抽象化により作られる abstract を Φ-abstract と呼ぶ．上記 $\mathfrak{A}$ が Φ-semi-formula ならば，(1) を Φ-内包公理と呼ぶ．

二階論理の体系（３）

- Φ が semi-formula の集まりであるとき，Φ-体系とは SLK にすべての Φ-内包公理を始シークエントとして付け加えたもの．
- Φ-LK は SLK に次の推論図を加えたもの．

$$\Phi\text{-}\forall\mathrm{L} \quad \frac{F(V), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall\varphi\, F(\varphi), \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \Phi\text{-}\exists\mathrm{R} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, F(V)}{\Gamma \Rightarrow \Delta \exists\varphi\, F(\varphi)}$$

  V は任意の Φ-abstract．comprehension abstract と 呼ばれる．
- 命題：任意の Φ について，Φ-体系と ΦLK は同値である．
- Φ が代入について閉じているとする（$F(\alpha)$ と V が Φ に属するならば，$F(V)$ もそうである．）もしこのとき言語 L2 のシークエント $S(\alpha)$ が Φ-LK (cut-free) provable であれば，$S(V)$ も Φ-LK (cut-free) provable.

二階論理の体系（３）

- $L2$ の semi-formula の全体を，含まれる二階の量化記号の複雑さによって階層 $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ に分類する．
  - **定義．** Φ_0 は一階の量化記号のみを含む semi-formula の全体．Φ_0 に属する semi-formula を**可述的**（predicative）と呼ぶ．
  - **定義．** Φ_{n+1} を次の条件を満たす $L2$ の semi-formula の最小集合とする：
    (1) $\Phi_n \subseteq \Phi_{n+1}$.
    (2) $\varphi \in \Phi_{n+1}$ ならば $\neg\varphi \in \Phi_{n+1}$.
    (3) $\varphi, \psi \in \Phi_{n+1}$ ならば $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi \in \Phi_{n+1}$.
    (4) $\varphi(x) \in \Phi_{n+1}$ ならば $\forall x\, \varphi(x) \in \Phi_{n+1}$ および $\exists x\, \varphi(x) \in \Phi_{n+1}$（$x$ は一階変項）.
    (5) $\varphi(\Phi) \in \Phi_{n+1}$ ならば $\forall \Phi\, \varphi(\Phi) \in \Phi_{n+1}$ および $\exists \Phi\, \varphi(\Phi) \in \Phi_{n+1}$（$\Phi$ は Φ_n に属する abstract）.

- 可述的二階論理 Φ_0LK には（証明還元で）カット除去が成り立つ．
  - Φ_0LK は LK の保存的拡張である．

二階論理の体系（４）：竹内の基本予想

- Ω を L2 の semi-formula 全体の集合としたとき，ΩLK は無制限な包括公理をもつ二階論理である（非可述的である）．別名を G^1LC という（竹内外史の命名）
- 竹内外史は，この体系だけでなく，より一般的な高階論理のシークエント計算の体系 GLC（有限階の階層を含む finite-order calculus predicate, simple theory of types などとも呼ばれる）を定式化した．
（simply typed λ-calculus とは別ものなので注意）．
- 竹内の基本予想とは，G^1LC 及び GLC においてカット除去定理が成立するという予想である．

竹内の基本予想を巡る状況

- 竹内自身は部分的な結果は得ていたが，基本予想は証明していない（なので，竹内の定理とは言われていない）．
- 可述的な Φ_0LK とは異なり，G^1LC（ΩLK）あるいは GLC の場合には証明還元による証明が著しく困難．
- なぜか？　$\forall 2L$ で上式列に現れる V（abstract）が推論規則 $\forall 2L$ によって導入される論理式より複雑になり得る．
- これにより，カット除去のプロセスが停止することを帰納法により保証することが難しい．
- 竹内の証明論における最大の課題とは，二階論理における非可述性のもたらす困難を「証明」の構造を分析することによって馴致することであったと言ってよい．

竹内の基本予想の解決（１）

- にもかかわらず，1970 頃今から半世紀以上前に竹内の基本予想は肯定的に解決されている．
- どういうことか？　竹内自身が使うことのなかった，いわゆるモデル論的（意味論的）証明によって解決された．
- ここでそのアウトラインを見ていく．
- まずは，L2 上で 2 階論理の (Henkin-style) model-theoretic interpretation を定義する
- $\mathfrak{I} = (S, \phi)$，ここで $S = (S_0, S_1, \ldots, S_i, \ldots)$（「構造」）．
  1. S_0 は空でない集合
  2. $S_{i+1} \subseteq \mathcal{P}(S_i)$
  3. ϕ は論理式に値 T, F を割り当てる関数である．
     ϕ の帰納的定義は以下の通り．
     - 命題結合子，一階量化子：一階の述語論理と同じ
     - 二階量化子
       $\phi(\forall X\, A(X)) = T \iff \forall P \in S_1,\ \phi(A(P)) = T$
       $\phi(\exists X\, A(X)) = T \iff \exists P \in S_1,\ \phi(A(P)) = T$

竹内の基本予想の解決（２）

- この $\mathfrak{I}$ とは別に，部分付値関数（semi-valuation）V を定義：部分付値関数 semi-valuation V とは，各論理式 A に対して $V(A) = T$ または $V(A) = F$ のいずれかを（高々一方のみ）割り当てる写像であり，以下を満たす：
  - $V(A) = T \Rightarrow V(A) \neq F, V(A) = F \Rightarrow V(A) \neq T$
  - $V(\neg A) = T \Rightarrow V(A) = F, \qquad V(\neg A) = F \Rightarrow V(A) = T$
  - $V(A \wedge B) = T \Rightarrow V(A) = T$ かつ $V(B) = T$
$V(A \wedge B) = F \Rightarrow V(A) = F$ または $V(B) = F$
  - $V(\forall X\, A(X)) = T \Rightarrow \forall G\, V(A(G)) = T$
$V(\forall X\, A(X)) = F \Rightarrow \exists G\, V(A(G)) = F$
$V(\exists X\, A(X)) = T \Rightarrow \exists G\, V(A(G)) = T$
$V(\exists X\, A(X)) = F \Rightarrow \forall G\, V(A(G)) = F$

竹内の基本予想の解決（３）

- カット許容性（admissibility of cut) in $\mathrm{G^1LC}$ and GLC
- **Thm.** （cut-free completeness of GLC w.r.t. a semi-valuation）

  $GLC^{cf} \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta \implies \exists V\big(V(\Gamma) = T \ \&\ V(\Delta) = F\big)$

  Lemma. A を任意の formula とし，semi-valuation V が与えられているとする．このときある ϕ_0 が存在して
  $V(A) = T \Longrightarrow \phi_0(A) = T, \qquad V(A) = F \Longrightarrow \phi_0(A) = F.$

  Thm. （soundness w.r.t. Henkin interpretations）

  $$GLC \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \implies \text{for any } \phi,\ \phi(\Gamma \Rightarrow \Delta) = T.$$

  したがって, $\exists\phi$, s.t. $\phi(\Gamma \Rightarrow \Delta) = F \implies GLC \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta.$

  これらを組み合わせると,
- **Thm.** $GLC \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \implies GLC^{cf} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta.$

竹内の基本予想の解決（４）

- 相対化（relativization）の理論（量化を特定の述語に相対化）と組み合わせると，G^1LC のカット許容性は解析（analysis）の基礎を与える二階算術の無矛盾性を含意する．カットを含まない証明の存在が言えれば十分．
- モデル論的な方法のもつ制約
  - カットを含まない証明の存在は言えるが，具体的にカットのない証明を構成するわけではない．
  - （竹内自身が強調しているが，本来の竹内の基本予想は証明還元によって，カットを使わない証明を構成できるというもの）
  - 従って，GLC の無矛盾性を証明することの意義は明確でない
- この状況を改良する方法が存在する．（J.-Y. Girard の結果）
  - 2 階型付き λ-計算（2nd order typed λ-calculus, $\lambda 2$）
  - カリー＝ハワード対応（Curry–Howard correspondence）